Омский Государственный университет

На правах рукописи

КЛИШЕВИЧ ВЛАДИМИР ВЛАДИМИРОВИЧ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ВО ВНЕШНЕМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ, ДОПУСКАЮЩЕМ НЕКОММУТАТИВНУЮ ГРУППУ ДВИЖЕНИЙ

Специальность 01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Омск – 1999

Работа выполнена в Омском государственном университете

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

доктор физико-математических наук, профессор Широков И.В.

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

доктор физико–математических наук, профессор Шаповалов А.В. (заведующий кафедрой теоретической физики, Томский госуниверситет)

доктор физико–математических наук, профессор Гуц А.К. (заведующий кафедрой математического моделирования, Омский госуниверситет)

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Институт сильноточной электроники СО РАН

Защита состоится 2 декабря 1999 г. в 15 час на заседании диссертационного совета К 064.36.07 по присуждению ученой степени кандидата физико - математических наук в Омском государственном университете (644077, г. Омск, пр.Мира, 55а).

С диссертацией можно познакомиться в Научной библиотеке Омского государственного университета.

Автореферат разослан 1 ноября 1999 г.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ

диссертационного совета, кандидат
физико-математических наук, доцент Вакилов А.Н.

1 Общая характеристика работы

1.1 Актуальность темы

Задача получения точных решений релятивистских волновых уравнений является актуальной задачей современной теоретической физики. Точные решения уравнений многих физических моделей служат образцом и отправной точкой для создания других, более реалистических концепций, а также для сравнения результатов с численными расчетами. Так в случае квантовой электродинамики знание точных решений уравнений Клейна-Фока и Дирака с классическим внешним полем позволяет эффективно исследовать процессы, происходящие в сильных электромагнитных полях, когда не работают стандартные методы теории возмущений. Такие ситуации возникают при изучении излучения мощных лазеров, в физике пульсаров и черных дыр, а также в космологии при исследовании ранних стадий эволюции Вселенной.

Вопросы получения точного решения физического уравнения напрямую связаны с понятием его интегрируемости. Настоящая диссертация посвящена вопросам интегрирования одного из основных уравнений теоретической физики – уравнения Дирака во внешнем гравитационном поле.

Изучение уравнения Дирака в искривленном пространстве следует непосредственно после его изучения в пространстве плоском. Введение в рассмотрение гравитационного поля существенно меняет динамику частицы и приводит к появлению новых эффектов, которые не существуют в плоском пространстве. Интерес к искривленным пространствам появился сравнительно недавно, интенсивные исследования в области квантовой теории поля в искривленном пространстве начались после открытия Хокингом процесса теплового излучения черных дыр. Параллельно вот уже несколько десятков лет не прекращается работа над созданием единой теории физических взаимодействий и предпринимаются попытки включить в общую схему гравитацию. Так проведенный Фоминым П.И.[1] учет гравитационного взаимодействия приводит к устранению расходимостей КЭД в однопетлевом приближении и снятию известных трудностей с "нуль-зарядом"и аномальными особенностями функций Грина ("духами"). Однако последовательный учет гравитации приводит к значительным математическим трудностям. Физические уравнения становятся, как правило, неинтегрируемыми, и вопросы, связанные с изучением решений этих уравнений, остаются неисследованными.

Традиционно точные решения дифференциальных уравнений математической физики получали методом разделения переменных. Этот метод развивался длительное время и к настоящему моменту представляет собой более или менее законченную теорию. Шаповаловым В.Н.[2] доказаны теоремы о необходимых и достаточных условиях разделения переменных в скалярном уравнении второго порядка. Для уравнения Дирака в настоящее время известны только необходимые условия о разделении переменных.

Решением уравнения Дирака в рамках метода разделения переменных занимались многие исследователи. Достаточно полно изучен класс пространств, где уравнение Дирака допускает разделение переменных, и получены соответствующие точные решения в работах Багрова В.Г., Обухова В.В., Шаповалова В.Н., Шаповалова А.В. и др.[3]-[6]. Отметим также значительный вклад математиков Калнинса Е., Миллера В. и Рудигера Р.. На основе полученных результатов была проведена систематизация практически всех известных точных решений уравнения Дирака с внешними полями и найдены обширные классы новых точных решений и новых полей. Таким образом, нахождение новых внешних полей, или римановых пространств, на фоне выполненных исследований представляется в значительной мере исчерпанным. Поэтому приобретает интерес получения точных решений в данном уравнении методами, отличными от метода разделения переменных. Это особенно важно в таких разделах теоретической физики, как квантовая электродинамика и квантовая теория поля при учете поправок ряда теории возмущений, где значение точных решений физических уравнений трудно переоценить.

В последнее время был разработан новый метод получения точных решений, получивший название метода некоммутативного интегрирования. Данный метод является аналогом метода точного интегрирования конечномерных гамильтоновых систем и позволяет получать точные решения дифференциальных уравнений, не допускающих полное разделение переменных. Первые результаты были получены в работах Шаповалова А.В. и Широкова И.В.[7]. Этими же авторами [8] указаны необходимые и достаточные условия интегрируемости системы линейных дифференциальных уравнений. В качестве примера методом некоммутативного интегрирования было проинтегрировано уравнение Дирака и Клейна-Фока в римановом пространстве нештеккелева типа, то есть пространстве, не допускающем полного разделения переменных в этих уравнениях. Затем вышла работа Широкова И.В. и Вараксина О.Л.[9], в которой приводился пример уравнения Дирака в римановом пространстве штеккелева типа, не допускающего полного разделения переменных, однако интегрируемого в некоммутативном смысле. Таким образом, к настоящему моменту сложилась потребность в систематизации полученных данных и проведении классификации римановых пространств с точки зрения интегрирования в них уравнения Дирака в некоммутативном смысле.

Отметим, что процедура интегрирования непосредственно проводится с помощью алгебры симметрии. В алгебру симметрии уравнения Дирака входят так называемые киллинговые и спинорные симметрии. Киллинговые симметрии строятся по векторным полям Киллинга, спинорные симметрии строятся по спинорным полям, к которым относятся поля Яно и Яно-Киллинга. Фактически вопрос о существовании операторов симметрии для уравнения Дирака сводится к вопросу о существовании указанных полей, поэтому для решения проблемы интегрируемости уравнения Дирака актуальна задача о нахождении полей Киллинга и спинорных полей. Кроме того, проведение процедуры интегрирования предполагает существование функционально независимых операторов симметрии. Этот важный вопрос пока полностью не решен в случае многообразий, допускающих спинорные структуры. Особенно интересно тождество вида $D^2 = L^2$, где D – оператор Дирака, L – спинорный оператор, которое позволяет интерпретировать оператор L как второй оператор Дирака. Решение этой задачи мы даем для четырехмерных римановых пространств.

1.2 Цель работы

1) Исследование вопроса о существовании спинорных симметрий для уравнения Дирака на произвольном римановом многообразии;

2) Выделение класса гравитационных полей (римановых пространств), допускающих четырех-и пятимерную группу движений, в которых нельзя провести процедуру разделения переменных в уравнении Дирака, но можно получить точные решения методом некоммутативного интегрирования;

3) Для всех пространств из пункта 2) проведение процедуры интегрирования уравнения Дирака и Клейна-Фока в некоммутативном смысле, а в тех случаях, где это возможно, также и методом разделения переменных;

4) Описание класса пространств, в которых для оператора Дирака возникают тождества вида $D^2 = L^2$, где L – спинорный оператор симметрии.

1.3 Научная новизна

В диссертации получены следующие оригинальные результаты:

1) найдены необходимые алгебраические условия существования спинорных симметрий для уравнения Дирака на римановом многообразии произвольной размерности и сигнатуры; с помощью полученных условий исследо-

ван вопрос о существовании спинорных симметрий в компактных и симметрических пространствах, а также в пространствах с материей;

2) для римановых пространств с четырех-и пятимерной группой движений вычислены киллинговы и спинорные операторы симметрии для оператора Дирака и изучена структура алгебры симметрии; указаны тождества в алгебре симметрии уравнения Дирака;

3) среди римановых пространств с четырех-и пятимерной группой движений выделены все пространства, в которых не выполняются условия разделения переменных в уравнении Дирака, но алгебра симметрии удовлетворяет условиям теоремы о некоммутативной интегрируемости;

4) в пространствах из пункта 3) впервые уравнение Дирака и Клейна-Фока проинтегрировано методом некоммутативного интегрирования;

5) выделен класс пространств, в которых существует второй оператор Дирака и доказана его эквивалентность оператору Дирака, определенному стандартным образом. Показано, что в гравитационном поле, допускающем второй оператор Дирака состояние частицы вырождено и введена величина для полного описания состояния частицы. Вскрыт физический смысл этой величины. Для пространств с четырех-и пятимерной группой движений, найдены все метрики пространств допускающих второй оператор Дирака.

6) найдено точное решение уравнения Дирака и Клейна-Фока в нештеккелевом риччи-плоском пространстве.

1.4 Научная и практическая ценность

Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области квантовой электродинамики, квантовой теории поля, классической и квантовой гравитации, точных решений дифференциальных уравнений, космологии. Найденные редуцирующие уравнения в обычных производных открывают дорогу для построения точных решений уравнений Дирака и Клейна-Фока в указанных гравитационных полях. Результаты диссертации можно использовать при изучении электромагнитных процессов в искривленных пространствах.

1.5 Основные положения диссертации, выносимые на защиту

1. Нахождение алгебраических условий существования спинорных симметрий для уравнения Дирака на произвольном римановом многообразии; с помощью агебраических условий исследование вопроса о существовании спинорных симметрий в компактных, симметрических пространствах и простран-

ствах с материей, а также в четырехмерных пространствах с четырех-и пятимерной группой движений;

2. Выделение всех четырехмерных пространтств с четырех-и пятимерной группой движений, в которых нельзя провести стандартную процедуру разделения переменных в уравнении Дирака, но алгебра симметрии уравнения Дирака удовлетворяет условиям теоремы о некоммутативной интегрируемости;

3. Для всех пространств из пункта 2 проведение процедуры некоммутативного интегрирования уравнения Дирака и Клейна-Фока;

4. Выделение класса римановых пространств, в которых существует второй оператор Дирака.

1.6 Апробация работы

Материалы диссертации докладывались на II Международной конференции "Квантовая теория поля и гравитация"(Томск, 1997), III Сибирская Геометрическая конференция (Томск, 1998), семинарах кафедры теоретической физики Томского и Омского университетов. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 статьях.

1.7 Структура и объем диссертации

Диссертация объемом 142 страницы печатного текста состоит из введения, четырех глав, заключения, 5 приложений, 6 таблиц и списка цитируемой литературы в 254 наименований.

2 Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель работы и представлена ее научная новизна.

Глава I носит обзорный характер. В пункте **1 Главы I** рассмотрены общие вопросы теории симметрии дифференциальных уравнений. В пункте **2 Главы I** рассмотрено уравнение Дирака в римановом пространстве и его операторы симметрии.

Уравнение Дирака в некоторой системе координат $\{x^i\}$ *четырехмерного* риманова пространства имеет вид:

$$D\Psi \equiv \gamma^k P_k \Psi = m\Psi. \tag{1}$$

Здесь D – оператор Дирака, $m - const$, $P_k = i(\nabla_k + \Gamma_k)$, ∇_k – оператор ковариантной производной по координате x^k относительно метрики, матрицы Дирака в римановом пространстве $\gamma^k = \gamma^k(x)$ определяются как произвольное, но фиксированное решение системы $\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = g^{ij}$, Γ_k – спинорная связность, для которой использована явная формула $\Gamma_i = -1/4\gamma_{k;i}\gamma^k$.

Общий вид операторов симметрии для оператора (1) впервые получен Шаповаловым В.Н.[10]. Эта задача решалась также независимо Картером и МакЛенаганом [11], МакЛенаганом и Спинделом [12]. Оператор симметрии для оператора Дирака представляет собой линейную комбинацию трех независимых операторов следующего вида:

$$X = \xi^k P_k - \frac{i}{4}\gamma^{kl}\xi_{k;l} \tag{2}$$

$$L = \overset{*}{\gamma}_j\, f^{kj} P_k + \frac{i}{3}\gamma_j \widetilde{f}^{kj}{}_{;k}, \tag{3}$$

$$J = 2\gamma\gamma^{lk} f_k P_l + \frac{3i}{4}\gamma f^k{}_{;k}. \tag{4}$$

Здесь $\gamma^{kl} = \frac{1}{2}[\gamma^k, \gamma^l]$, $\gamma = -\frac{1}{4!}e_{klij}\gamma^k\gamma^l\gamma^i\gamma^j$, $\overset{*}{\gamma}_j = -\frac{1}{3!}e_{jkli}\gamma^k\gamma^l\gamma^i$, $\widetilde{f}_{ij} = \frac{1}{2}e_{ijkl}f^{kl}$ – дуальный тензор к f^{ij}, $e_{ijkl} = \sqrt{-\det(g_{mn})}\varepsilon_{ijkl}$ – полностью антисимметричный тензор ($\varepsilon_{1234} = 1$).

Векторное поле ξ^k в формуле (2) определяется из уравнения

$$\xi_{i;k} + \xi_{k;i} = 0 \tag{5}$$

и называется *векторным полем Киллинга.* Тензорное поле в формуле (3) подчиняется условиям

$$f_{ij} + f_{ji} = 0, \quad f_{ij;k} = e_{ijkl}g^l, \quad (f_{ij;k} + f_{ik;j} = 0) \tag{6}$$

где g^l – некоторый вектор, и называется *тензорным полем Яно-Киллинга.* На векторное поле в уравнении (4) имеется формула:

$$f_{i;j} = \frac{1}{4}g_{ij}f^k{}_{;k}, \quad f_i = \eta_{,i}, \tag{7}$$

здесь η – скаляр, это векторное поле называется *векторным полем Яно.* Операторы (2) называются *киллинговыми (лоренцевыми)* операторами симметрии. Операторы (3) и (4) называются *спинорными (спиновыми)* операторами симметрии оператора Дирака (1). Алгебру киллинговых и спинорных операторов симметрии мы обозначаем символами Λ_K и Λ_S соответственно. Поля (6) и (7) мы называем единым термином *спинорные поля.*

Замечание. Алгебра Ли киллинговых операторов симметрии Λ_K уравнения Дирака изоморфна алгебре Ли операторов симметрии первого порядка уравнения Клейна-Фока $\Lambda_{KF} : \{X_i = \xi_i^k \partial_{x^k}\}$ в том смысле, что структурные константы этих алгебр совпадают.

В пунктах **3-4 Главы I** дан обзор основных методов решения уравнения Дирака в римановом пространстве и сформулирован алгоритм решения задачи о выделении римановых пространств с четырех-и пятимерной группой движений, в которых нельзя провести стандартную процедуру разделения переменных в уравнении Дирака, но алгебра симметрии которого удовлетворяет условиям теоремы о некоммутативной интегрируемости.

Стандартную процедуру разделения переменных в уравнении Дирака мы понимаем в смысле следующего определения:

Определение 1 *Говорят, что уравнение Дирака (1) допускает полное разделение переменных, если существует система координат $\{x_i\}$, в которой фундаментальная матрица решений имеет вид:*

$$\Psi = S(x)\Omega, \quad \Omega = \Psi_1(x^1, \lambda)\Psi_2(x^2, \lambda)\Psi_3(x^3, \lambda)\Psi_4(x^4, \lambda), \tag{8}$$

$$[\Psi_i, \Psi_j] = 0, \quad \det S(x) \neq 0, \quad \det\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^j}\Omega^{-1}\right)\right) \neq 0.$$

Шаповаловым В.Н.[13] показано, что *необходимым* условием разделения переменных в уравнении Дирака в рамках определения 1 является существование тройки взаимно коммутирующих операторов первого порядка. В этом случае задача нахождения решения уравнения (1) сводится к задаче на собственные значения

$$D\Psi = m\Psi, \quad X_1\Psi = \lambda\Psi, \quad X_2\Psi = \mu\Psi \quad X_3\Psi = \nu\Psi,$$

здесь λ, μ, ν – существенные параметры разделения. Отметим, что достаточные условия разделения переменных в уравнении Дирака в смысле определения 1 неизвестны.

Приведем основные положения метода некоммутативного интегрирования. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$H(x, \partial_x)f(x) = 0 \tag{9}$$

Определение 2 *Будем говорить, что система (9) интегрируема, если построение базиса его решений может быть сведено к квадратурам и интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения.*

Пусть уравнение (9) допускает (в общем случае некоммутативную) алгебру симметрии Λ. Алгебра Λ порождается генераторами X_i – линейными дифференциальными операторами первого порядка:

$$[X_i, H] = 0, \quad [X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k, \; i, j, k = 1, \ldots, \dim \Lambda.$$

Как показано Шаповаловым А.В. и Широковым И.В.[8], *необходимым* и *достаточным* условием интегрируемости уравнения (9) в смысле определения 2 является выполнение равенства

$$\dim \Lambda + \operatorname{ind} \Lambda = 2(n-1), \tag{10}$$

где n – размерность пространства, $\operatorname{ind} \Lambda$ – индекс алгебры Λ, для его вычисления используется формула

$$\operatorname{ind} \Lambda \equiv \dim \Lambda - \sup_{f \in \Lambda^*} \operatorname{rank} f(c_{ij}^k X_k).$$

В важном для нас случае размерности пространства $n = 4$, формула (10) переписывается в виде

$$\dim \Lambda + \operatorname{ind} \Lambda = 6. \tag{11}$$

В случае выполнения условия (11) точное решение уравнения (9) находится из системы уравнений:

$$X_i \Psi_J(x; \lambda) = \widehat{\ell}_i(J, \lambda, \partial_\lambda) \Psi_J(x; \lambda), \tag{12}$$
$$H \Psi_J(x; \lambda) = 0, \tag{13}$$

где $\widehat{\ell}_i$ – дифференциальные операторы первого порядка, задающие λ – представление алгебры симметрии Λ.

Подалгебра симметрии уравнения Дирака Λ_K, построенная по киллинговым симметриям (2), изоморфна алгебре симметрии уравнения Клейна-Фока и представляет собой группу движений рассматриваемого риманова пространства. Таким образом, зная векторы Киллинга (5), мы можем построить операторы симметрии (2) и, наложив условия интегрируемости (11), отобрать те римановы пространства, в которых уравнение Дирака и Клейна-Фока допускают некоммутативное интегрирование. Однако кроме киллинговых симметрий (2) для уравнения Дирака могут существовать и спинорные симметрии (3) и (4). По этой причине, если в алгебре Λ_K уравнения Дирака не находится необходимой тройки коммутирующих операторов, недостающий оператор может быть найден в алгебре Λ_S. В этой связи актуальна задача исследования существования в римановом пространстве спинорных операторов симметрии (3) и (4), которая сводится к исследованию существования спинорных полей (6) и (7). Этим вопросам посвящена **Глава II**. Отметим, что систематическая классификация римановых пространств, допускающих тензорное поле Яно-Киллинга (6), дана в работах Дайетца и Рудигера [14],[15] и частично в работе Шаповалова В.Н.[10].

Классификация римановых пространств по группам движений хорошо известна в литературе. Эта задача решалась различными авторами при тех или иных дополнительных предположениях. Общее решение проблемы дано в совместных работах А.З. Петрова, В.Р. Кайгородова и В.Н. Абдуллина. При рассмотрении конкретных пространств мы опирались на монографию А.З. Петрова [16], где результаты сведены воедино.

Обращение к классификации пространств по группам движений диктуется простыми физическими соображениями. С одной стороны, эти пространства богаты симметриями, с другой – компоненты метрического тензора могут содержать произвольные функции, что дает значительную свободу действий при рассмотрении различных приложений. Все физически интересные пространства типа Шварцшильда, Керра, Керра-Ньюмена и др. допускают группу движений достаточно высокого порядка (обычно четвертого).

Решение задачи проводилось по следующему алгоритму:

1) Для пространств с четырех-и пятимернной группой движений из монографии [16] строим алгебру Λ_K киллинговых симметрий (2) для уравнения Дирака и изучаем структуру этой алгебры. Если имеется тройка коммутирующих операторов, этот случай не рассматриваем, т.к. процедура разделения переменных в уравнении Дирака в этом случае тривиальна;

2) Зная структуру алгебры Λ_K, проверяем условие некоммутативной интегрируемости (11) и оставляем только те пространства, в которых алгебра киллинговых симметрий уравнения Дирака удовлетворяет данному условию;

3) Ищем спинорные поля (6) и (7) в этом пространстве;

4) Если пространство не допускает спинорных полей, проводим процедуру некоммутативного интегрирования с помощью алгебры киллинговых симметрий Λ_K;

5) Если спинорные поля существуют, вычисляем их компоненты и строим спинорные операторы симметрии (3) и (4), причем мы работаем только с теми операторами, для которых тензор Киллинга, построенный по полям Яно или Яно-Киллинга, принадлежит полному набору;

6) Изучаем алгебру киллинговых и спинорных операторов, если находится тройка коммутирующих операторов, решаем задачу на разделение переменных, кроме того, поскольку алгебра киллинговых симметрий удовлетворяет

условиям некоммутативной интегрируемости, мы проводим также процедуру некоммутативного интегрирования.

В **Главах III** и **IV** для всех римановых пространств с четырех-и пятимерной группой движений реализован предложенный алгоритм. Тем самым проведена дополнительная классификация римановых пространств с точки зрения интегрирования в них уравнения Дирака.

Пункт 3) нашего алгоритма предполагает наличие эффетивных способов нахождения спинорных полей. Для полей (6) и (7) в пунктах **1-2 Главы II** найдены необходимые алгебраические условия существования, сводящиеся к линейным однородным уравнениям на компоненты полей. Для векторного поля Яно получено необходимое условие вида

$$f_n(g_{ij}R^n{}_k - g_{ik}R^n{}_j + (n-1)R^n{}_{ijk}) = 0. \tag{14}$$

Тензор Римана определяется формулой: $R^i{}_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{nk}\Gamma^n_{jl} - \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{jk}$, а тензор Риччи есть свертка по первому и третьему индексам: $R_{jk} = R^n{}_{jnk}$.

Для тензорного поля Яно-Киллинга получено необходимое условие вида

$$(R^n{}_{kij} + R^n{}_{jik})f_{in} - R^n{}_{iik}f_{jn} - R^n{}_{iij}f_{kn} = 0, \tag{15}$$

которое должно выполняться для всех различных индексов i, j, k.

Для пространств постоянной кривизны

$$R_{ijkl} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad R_{jl} = \frac{R}{n}g_{jl}$$

формулы (14) и (15) удовлетворяются тождественно, что говорит о том, что в пространствах постоянной кривизны нет препятствий для существования подобного рода полей, а, значит, и для существования подобного рода спинорных операторов. Для плоского пространства и пространства де Ситтера сигнатуры $(+---)$ компоненты спинорных полей вычислены в явном виде.

С помощью полученных необходимых условий (14) и (15) в пунктах **1-2 Главы II** изучен вопрос существования спинорных полей в компактных и симметрических пространствах, а так же в пространствах с материей в виде сплошной среды.

Для векторного поля Яно в пункте **1 Главы II** получены следующие результаты

Утверждение 1 *В компактном римановом многообразии V_n с нулевым тензором Риччи ($R_{ik} = 0$) скалярное произведение вектора Киллинга и вектора Яно есть величина постоянная: $\xi^i f_i = const$.*

Утверждение 2 *В компактном римановом многообразии V_n с нулевым тензором Риччи ($R_{ik} = 0$), допускающем векторное поле Киллинга, векторное поле Яно ковариантно постоянно.*

Утверждение 3 *Векторное поле Яно на симметрическом риччи-плоском неплоском многообразии существует тогда и только тогда, когда оно ковариантно постоянно.*

Утверждение 4 *Векторное поле Яно на симметрическом пространстве, не являющемся пространством постоянной кривизны, существует тогда и только тогда, когда оно ковариантно постоянно.*

В пункте **1 Главы II** рассмотрен вопрос о векторе Яно в пространствах с тензором Риччи вида:

$$R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} = \kappa T_{ij} + \Lambda g_{ij}, \tag{16}$$

здесь T_{ij} – тензор энергии-импульса материи, κ – константа, $\Lambda - const$ (Λ – член). Тензор энергии-импульса T_{ij} выбран в виде:

$$T_{ij} = -p g_{ij} + (p + \varepsilon) u_i u_j. \tag{17}$$

Величины p, ε и u_i имеют следующее физическое истолкование. p – давление, оказываемое данным участком среды, ε – плотность энергии среды, u_i – 4-скорость макроскопического движения элемента среды. Доказана следующая

Теорема 1 *В пространстве с тензором Риччи вида (16) векторное поле Яно существует тогда и только тогда, когда 4-вектор скорости частиц среды u_i ковариантно постоянен.*

Из этой теоремы следует, что вектор Яно совпадает с вектором 4-скорости $f_i = u_i$, т.е. проясняется его физический смысл. Как следствие теоремы 1 получено следующее уравнение состояния

$$\varepsilon = \frac{2\Lambda}{\kappa} - 3p. \tag{18}$$

Таким образом, существование оператора симметрии (4) для уравнения Дирака в пространстве с тензором Риччи (16) приводит в космологических моделях к зависимости (18). Из теоремы 1 получено следствие

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0,$$

которое говорит о том, что в космологических моделях вида (16), допускающих симметрии оператора Дирака вида (4), отсутствуют временные сингулярности.

Используя необходимые условия (15), в пункте **2 Главы II** указаны компоненты поля Яно-Киллинга в симметрических четырехмерных пространствах, не являющихся пространствами постоянной кривизны.

В пунктах **3-4 Главы II** в качестве примеров пространств постоянной кривизны рассмотрены плоское пространство и пространство де Ситтера с сигнатурой $(+ - --)$. В этих пространствах найдены спинорные поля (6) и (7), и по ним построены спинорные операторы симметрии (3) и (4). Показано, что спинорные симметрии уравнения Дирака в плоском пространстве и пространстве де Ситтера совпадают (эквивалентны), алгебра спинорных операторов является квадратичной.

В пунктах **1-4 Главы III** систематически изучается структура алгебры симметрии уравнения Дирака в римановом пространстве с четырех-и пятимерной группой движений. Приводятся тождества между спинорными и киллинговыми операторами симметрии уравнения Дирака. Выделяются все римановы пространства, в которых нельзя провести процедуру разделения переменных в уравнении Дирака в смысле определения 1, но алгебра симметрии удовлетворяет условиям теоремы о некоммутативной интегрируемости (11).

В пункте **5 Главы III** отдельно изучены тождества для уравнения Дирака вида:

$$L^2 = D^2, \tag{19}$$

где D – оператор Дирака, L – оператор симметрии (3). Тождество (19) позволяет интерпретировать оператор L как второй оператор Дирака. В этом же пункте выделен класс римановых пространств, допускающих второй оператор Дирака, и доказана его эквивалентность стандартному оператору Дирака (1). Для того чтобы оператор симметрии L (3) представлял собой второй оператор Дирака, необходимо выполнение равенства

$$f^{ik} f^{j}_{\ k} = g^{ij}, \tag{20}$$

где f_{ij} – антисимметричное тензорное поле Яно-Киллинга (6). Эквивалентность операторов D и L означает, что существует неособенная матрица S, такая, что

$$SL = DS. \tag{21}$$

Из формулы (21) следует равенство индексов операторов D и L

$$\operatorname{index} L = \operatorname{index} D. \tag{22}$$

Это дает независимое доказательство формулы (22), впервые доказанную ван Холтеном и др.[17] другим способом.

Формулу (20) можно рассматривать также как задачу на собственные значения:

$$A_{ij}^{nm} g_{nm} = \lambda g_{ij}, \quad A_{ij}^{nm} = f^n{}_i f^m{}_j, \tag{23}$$

поскольку тензорное поле Яно-Киллинга определено с точностью до произвольного множителя, параметр λ принимает принципиально только два значения: $\lambda = 0, 1$. Случай $\lambda = 1$ приводит к появлению второго оператора Дирака. Случай $\lambda = 0$ требует отдельного исследования, поскольку приводит к появлению оператора симметрии со свойством $L^2 = 0$. Мы приводим примеры таких гравитационных полей.

Основное свойство тензорного поля Яно-Киллинга, фигурирующего в формуле (23), дается следующим утверждением

Утверждение 5 *Тензорное поле Яно-Киллинга, удовлетворяющее условию (23), ковариантно постоянно.*

Итак, класс римановых пространств, в которых возникает второй оператор Дирака, задается условиями:

$$g^{ij} = f^{ik} f^j{}_k, \quad f_{ij;k} = 0, \quad f_{ij} + f_{ji} = 0. \tag{24}$$

Замечание. Матрицу A_{ij}^{nm} в формуле (23) без ограничения общности можно считать постоянной, поскольку, как доказано Широковым А.П.[19], если тензор f_{ij} (произвольный) ковариантно постоянен, то существует система координат, в которой матрица $f^i{}_j$ постоянна (приведена к нормальной жордановой форме).

Появление второго оператора Дирака дает дополнительную информацию. Прежде всего отметим, что из (19) и (21) сразу следует, что матрица S является симметрией для квадрата оператора Дирака: $D^2 = DD = (S^{-1}LS)(S^{-1}LS) = S^{-1}L^2S = S^{-1}D^2S$, а также для любой его четной степени $[D^{2n}, S] = 0$. Кроме того, можно построить цепочку операторов $D_+^{(k)} = [D, D_+^{(k-1)}]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ которые антикоммутируют с оператором Дирака D ($D_+^{(0)} = [D, S] = DS - SD$), и цепочку операторов $D_-^{(k)} = \{D, D_-^{(k-1)}\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, которые коммутируют с оператором Дирака D ($D_-^{(0)} = \{D, S\} = DS + SD$).

Аналогичную цепочку коммутирующих и антикоммутирующих операторов можно построить и для оператора L.

Свойства матрицы S даются следующими леммами:

Лемма 1 *Матрица S унитарна.*

Лемма 2 *Если матрица S эрмитова ($S^+ = S$), тогда $S^2 = 1$, $[D^{(+)}, S] = 0$ и $\{D^{(-)}, S\} = 0$.*

Операторы $D^{(\pm)}$ определяются формулой (25).

Рассмотрим структуру $\left(D^{(-)}, K^{(-)}, S\right)$, которая обладает свойствами

$$K^{(-)} = D^{(-)^2}, \quad S^2 = 1, \quad \{D^{(-)}, S\} = 0.$$

По терминологии Э.Виттена [18] тройка $\left(D^{(-)}, K^{(-)}, S\right)$ обладает суперсимметрией. Таким образом, в классе пространств (24) существует суперсимметричная структура.

В случае эрмитовости матрицы S, мы имеем дело с некоторой физически наблюдаемой величиной. Условие $S^2 = 1$ дает возможность интерпретировать эту величину как аналог четности.

Поскольку операторы D и L коммутируют, поставим задачу на собственные значения:

$$D\Psi = m\Psi, \quad L\Psi = m'\Psi.$$

Однако условие (19) сразу дает $m' = \pm m$ и мы имеем два сорта состояний частицы $\Psi^{(\pm)}$:

$$D\Psi^{(\pm)} = m\Psi^{(\pm)}, \quad L\Psi^{(\pm)} = \pm m\Psi^{(\pm)}.$$

Чтобы выделить эти состояния мы вводим операторы:

$$D^{(\pm)} = (D \pm L)/2, \qquad (25)$$

которые обладают свойствами:

$$D^{(\pm)}\Psi^{(\pm)} = m\Psi^{(\pm)}, \quad D^{(\pm)}\Psi^{(\mp)} = 0, \quad D^{(\pm)}D^{(\mp)} = 0.$$

Состояния частицы $\Psi^{(\pm)}$ можно интерпретировать как "четные"и "нечетные".

В качестве иллюстрации мы рассматриваем классификацию римановых пространств по группам движений А.З. Петрова [16]. В пункте **5 Главы III** указаны все метрики с четырех-и пятимерными группами движений, которые допускают второй оператор Дирака. Отметим, что в плоском пространстве и пространстве де Ситтера все поля Яно-Киллинга известны. Проверка условий (24) в этих пространствах дает отрицательный результат. Таким образом, в плоском пространстве и пространстве де Ситтера второго оператора Дирака не существует.

В пунктах **1-2 Главы IV** для всех пространств, в которых алгебра симметрии удовлетворяет условиям теоремы о некоммутативной интегрируемости, проведена процедура некоммутативного интегрирования уравнения Дирака, и впервые получены редуцирующие уравнения в обычных производных. В пункте **3 Главы IV** аналогичные действия проделаны для уравнения Клейна-Фока. В пункте **4 Главы IV** из всех рассмотренных пространств выявлены те, которые удовлетворяют уравнениям Эйнштейна, и для них определен тип Петрова. В пункте **5 Главы IV** рассмотрен пример нештеккелева риччи плоского риманова пространства, в котором методом некоммутативного интегрирования и с помощью второго оператора Дирака найдено точное решение, явным образом построены состояния $\Psi^{(\pm)}$.

Всего найдено 12 римановых пространств с четырехмерной группой движений и 5 римановых пространств с пятимерной группой движений, где для уравнения Дирака нельзя использовать метод разделения переменных, но алгебра симметрии удовлетворяет условиям теоремы о некоммутативной интегрируемости. Для пространств с пятимерной группой движений найдено 6 пространств, в которых существует второй оператор Дирака, для пространств с четырехмерной группой движений найдено 2 таких пространства.

В заключении подведены итоги и сформулированы выводы диссертации.

3 Список работ автора

[1] Вараксин О.Л., Клишевич В.В. Интегрирование уравнения Дирака в римановом пространстве с пятимерной группой движений // Известия вузов. Физика. – 1997. – N8. – с.24–28.

[2] O.L. Varaksin, V.V. Klishevich Integration of Dirac's equation with a group of motion in Riemannian spaces. Quantum field theory and gravity. Second International Conference, Russia, Tomsk, 1997, p.305-308.

[3] Клишевич В.В. Об интегрировании уравнения Дирака в одном римановом пространстве. Труды III Сибирской Геометрической конференции, г.Томск, 1998, с.27-34.

[4] Клишевич В.В. Спинорные симметрии уравнения Дирака в плоском пространстве и пространстве де Ситтера. Труды III Сибирской Геометрической конференции, г.Томск, 1998 г., с.35-41.

[5] Клишевич В.В. К вопросу о выборе спиновой связности при изучении уравнения Дирака в римановом пространстве // Вестник Омского университета. Физика. – 1998. – N4. – с.19–21.

[6] Клишевич В.В. Некоммутативное интегрирование уравнения Дирака в римановом пространстве // Вестник Омского университета. Физика. – 1999. – N3. – с.53–55.

4 Список цитируемой литературы

[1] Фомин П.И. Некоторые вопросы квантовой электродинамики на малых расстояниях. ЭЧАЯ, 1976, т.7, N3, стр.687-725.

[2] Шаповалов В.Н. Разделение переменных в линейном дифференциальном уравнении второго порядка. Дифференциальные уравнения, 1980, т.16, N10, стр.1864-1874.

[3] Bagrov V.G. and Obuchov V.V. New method of integration for the Dirac equation on curved space-time. J.Math.Phys, 1992, v.33, N6, p.2279-2289.

[4] Bagrov V.G., Shapovalov A.V., Yevseyevich A.A. Separation of variables in the Dirac equation in Stäckel spaces. Class.Quantum Grav., 1990, N7, p.517-531.

[5] Багров В.Г., Гитман Д.М., Задорожный В.Н., Сухомлин Н.Б., Шаповалов В.Н. Новые точные решения уравнения Дирака. Известия вузов. Физика, 1978, N2, стр.13-23.

[6] Багров В.Г., Обухов В.В. Проблема полного разделения переменных в квадрированном уравнении Дирака. Известия вузов. Математика., 1994, N2, стр.11-14.

[7] Шаповалов А. В., Широков И. В. Некоммутативное интегрирование уравнений Клейна - Гордона и Дирака в римановых пространствах с группой движений. Известия вузов. Физика, 1991, N5, стр.33-38.

[8] Шаповалов А.В., Широков И.В. Некоммутативное интегрирование линейных дифференциальных уравнений. ТМФ, 1995, т.104, N2, стр.195-213.

[9] Вараксин О.Л., Широков И.В. Интегрирование уравнения Дирака, не допускающего полное разделение переменных в штеккелевых пространствах. Известия вузов. Физика., 1996, N1, стр.31-37.

[10] Шаповалов В.Н. Симметрия уравнения Дирака-Фока. Известия вузов. Физика., 1975, N6, стр.57-63.

[11] Carter B. and McLenaghan R.G. Generalized total angular momentum operator for the Dirac equation in curved space-time. Phys.Rev., 1979, D19, p.1093-1097.

[12] McLenaghan R.G. and Spindel Ph. Phys.Rev, 1979, D 20, p.409.

[13] Шаповалов В.Н., Экле Г.Г. Алгебраические свойства уравнения Дирака. Элиста: Калмыцкий университет, 1972.

[14] Dietz W. and Rudiger R. Space - times admitting Killing - Yano tensors. I. Proc.Roy.Soc.London, 1981, A375, p.361.

[15] Dietz W. and Rudiger R. Space - times admitting Killing - Yano tenzors. II. Proc.Roy.Soc.London, 1981, A381, p.315.

[16] Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: Наука, 1961.

[17] J-W van Holten, A.Waldron, K.Peeters An index theorem for non-standard Dirac operators. hep-th/9901163, 1999.

[18] Witten E. Supersymmetry and Morse theory. J. Diff. Geo, 1982, N17, p.661-692.

[19] Широков А.П. Об одном свойстве ковариантно постоянных аффиноров. ДАН, 1955. т.102. N3, стр.461-464.