

А. К. Гуц

## НАРУШЕНИЕ СВЯЗНОСТИ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Определяются условия, при которых физическое пространство изменяет число связных компонент.

В этой заметке мы определяем условия, при которых физическое пространство изменяет свою топологию, точнее, становится несвязным. Для замкнутой вселенной вопрос исследовался в [1].

Пусть  $M$  — связное трехмерное риманово многообразие с метрикой  $\gamma_{\alpha\beta}^0$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ),  $D_0 \subset M$  — замкнутая область, гомеоморфная трехмерному шару. Допустим, что с течением времени  $t \in [0, 1]$  многообразие  $M_0 = M(t=0)$  увеличивает число компонент связности, превращаясь в многообразие  $M_1(t=1)$ , которое уже несвязно. Если говорить образно, то от  $M_0$  отрывается область  $D_0$ . Чтобы не усложнять изложение, примем, что  $M_1$  имеет две компоненты связности  $D_1$  и  $C_1$ , т.е.  $M_1 = D_1 \cup C_1$ ,  $D_1 \cap C_1 = \emptyset$ . Переход от  $M_0$  к  $M_1$  осуществляется через некоторое критическое 3-пространство  $M_{1/2}(t=1/2)$ , которое получается из  $M_0$  стягиванием границы  $\partial D_0$  области  $D_0$  в точку. Тогда  $D_0$  превращается в область  $D_{1/2}$ , гомеоморфную трехмерной сфере  $S^3$ . Следовательно, необходимым этапом на пути к отрыву  $D_0$  от  $M_0$  является перетяжка  $M_0$  по  $\partial D_0$  — переход от  $M_0$  к  $M_{1/2}$ . Если  $F_0 \subset M_0$  — произвольное замкнутое двумерное подмногообразие, пересекающее  $D_0$  по  $B_0$ , причем  $B_0$  гомеоморфно двумерному шару,

то при  $t = 1/2$  граница  $\partial B_0$  уже стянута в точку, а при  $t = 1$  область  $B_0$  оторвана от  $F_0$ . Поэтому предварительно изучим нарушение связности двумерного многообразия  $F_0$ . Многообразие или пространство, полученное из  $F_0$  к моменту  $t$ , будем обозначать через  $F_t$ .

Осуществим отрывание  $B_0$  от  $F_0$  следующим образом. Рассмотрим семейство римановых метрик  $a_{AB}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $A, B = 1, 2$ , заданных на многообразии  $F_0$ , удовлетворяющее условиям:

1)  $a_{AB}(t)$  при  $0 \leq t < 1/2$  принадлежит классу  $C^2$ , и при  $t \geq 1/2$  функции  $a_{AB}(t)$  имеют разрывы производных первого рода на  $\partial B_0$ ;

2) длина кривой  $\partial B_0$ , вычисленная в метрике  $a_{AB}(t)$ ,  $t < 1/2$ , стремится к нулю при  $t \rightarrow 1/2$ , или, иначе,

$$d\sigma_t|_{\partial B_0} \xrightarrow{t \rightarrow 1/2-0} 0 \text{ и } d\sigma_t|_{\partial B_0} = 0 \text{ при } t \geq 1/2,$$

где  $d\sigma_t$  — элемент площади в метрике  $a_{AB}(t)$ ;

3) римановы пространства  $F_0 \setminus (B_0 \cup \partial B_0)$ ,  $B_0 \setminus \partial B_0$ , с индуцированной метрикой  $a_{AB}(t)$ ,  $t \geq 1/2$ , дополненные "точкой"  $\partial B_0$ , представляют собой замкнутые ориентированные многообразия. Обозначим их соответственно через  $A_t, B_t$

Разъясним метрические условия 1–3. Переход от  $F_0$  к  $F_1$  через  $F_{1/2}$  мы изображаем на одном и том же множестве точек  $F_0$ . Для этого на  $F_0$  вводится семейство топологий  $T_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , причем каждая топология  $T_t$  согласована с топологией, порождаемой метрикой  $a_{AB}(t)$ . Следовательно, пространство  $F_t$  как множество равно  $F_0$ , но имеет, вообще говоря, иную топологию. Символически можно написать  $F_t = \langle F_0, T_t \rangle$ , в частности  $B_t = \langle B_0, T_t \rangle$ , имея в виду индуцированную топологию на  $B_t$ . В топологии  $T_{1/2}$  кривая  $\partial B_0$  есть точка, в то

время как вычисление границы  $\partial_{1/2}B_{1/2}$  в топологии  $T_{1/2}$  множества  $B_{1/2}$  дает  $\emptyset$ , т.е.  $\partial_{1/2}B_{1/2} = \partial_{1/2} \langle B_0, T_{1/2} \rangle = \emptyset$ , ибо  $B_{1/2} = \langle B_0, T_{1/2} \rangle$  уже гомеоморфно сфере  $S^2$ . Таким образом, условие 2 означает стягивание  $\partial B_0$  в точку. Пространство  $F_{1/2}$  является критическим; оно состоит из двух многообразий  $A_{1/2}$  и  $B_{1/2}$ , имеющих общую точку  $\langle \partial B_0, T_{1/2} \rangle$ . При  $t > 1/2$  многообразия  $A_t, B_t$  изображают различные компоненты связности разорванного  $F_0$  (точка  $\langle \partial B_0, T_{1/2} \rangle$  уже изображает две различные точки). В этом нет ничего противоземного, так как компоненты связности в действительности диффеоморфны (и изометричны)  $A_t, B_t$  соответственно. Наше построение не столь удобно, как лоренцев кобордизм [2] между  $F_0$  и  $F_1$ , но зато приспособлено для сравнения интегралов, взятых по  $F_t, t < 1/2$  и  $F_s, s > 1/2$ , которое предстоит сделать ниже.

Проделанные построения позволяют говорить о топологической метаморфозе многообразия  $F_0$  благодаря применению теоремы Гаусса-Бонне. Последняя гласит, что для двумерного замкнутого ориентированного риманова многообразия  $F$  класса  $C^2$

$$\int_F \Gamma d\sigma = 2\pi\chi(F),$$

где  $\Gamma$  — гауссова кривизна;  $\chi(F)$  — характеристика Эйлера-Пуанкаре.

Следовательно, при  $0 \leq t < 1/2$

$$\int_{F_0} \Gamma_t d\sigma_t = 2\pi\chi(F_0) \quad (1)$$

и при  $s > 1/2$

$$\int_{A_s} \Gamma_s d\sigma_s = 2\pi\chi(A_s), \quad \int_{B_s} \Gamma_s d\sigma_s = 2\pi\chi(B_s), \quad (2)$$

где  $\Gamma_t, d\sigma_t$  — соответственно гауссова кривизна и элемент площади в метрике  $a_{AB}(t)$ . Пусть  $F_0$  гомеоморфно сфере  $S^2$ . Тогда  $\chi(F_0) = \chi(A_s) = \chi(B_s) = 2$ . Обратим внимание на то, что равенства (2) получены благодаря условию 1, т.е. за счет потери гладкости метрики  $a_{AB}(t)$  на  $\partial B_0$ .

Пусть  $V$  — малая окрестность кривой  $\partial B_0$  (в топологии  $T_0$ ). Будем считать, что  $a_{AB}(t) = a_{AB}(0)$  вне  $\bar{V}$ . Тогда из (1), (2) следует

$$\left( \int_{V \cap B_s} + \int_{V \cap A_s} \right) \Gamma_s d\sigma_s - \int_V \Gamma_t d\sigma_t = 4\pi, \quad \text{где } t < 1/2, \quad 1/2 < s$$

или

$$\int_V \left( \Gamma_s \frac{d\sigma_s}{d\sigma_t} - \Gamma_t \right) d\sigma_t = 4\pi. \quad (3)$$

Так как  $d\sigma_s = 0$  на  $\partial B_0$ , то из (3) получаем, что существует окрестность  $W \subset V$ , в которой  $\Gamma_s \gg \Gamma_t$ . Значит отрыв  $B_0$  от  $F_0$  означает резкое возрастание кривизны.

Возвращаясь теперь к нарушению связности физического пространства  $M_0$ , заключаем, что отрывание  $D_0$  от  $M_0$  характеризуется скачком гауссовой кривизны в некоторой окрестности  $U$  "сферы"  $\partial D_0$  у любого двумерного замкнутого многообразия  $F_0$ , пересекающего  $D_0$ . Отсюда можно сделать вывод о скачке скалярной кривизны  ${}^{(3)}R$  многообразия  $M_0$  в некоторой окрестности  $U \supset \partial D_0$ . В самом деле,  ${}^{(3)}R = 2\Gamma + \boldsymbol{x}$ , где  $\Gamma$  — гауссова кривизна сечения  $F_0$ , а  $\boldsymbol{x}$  — инвариант его внешней кривизны (формула Гаусса–Кодацци). Сечение можно выбрать так, что  $\boldsymbol{x} = 0$  (например, сечения  $\theta = \text{const}$  или  $\varphi = \text{const}$  замкнутой вселенной Фридмана). Поэтому скачок  $\delta\Gamma$  кривизны  $\Gamma$  влечет скачок  $\delta{}^{(3)}R$  кривизны  ${}^{(3)}R$ .

На множестве событий  $M_0 \times [0, 1]$  рассмотрим пространст-

венно-временную метрику

$$ds^2 = (N^2 - N_\alpha N^\alpha)dt^2 - 2N_\alpha dt dx^\alpha - \gamma_{\alpha\beta}(x, t) dx^\alpha dx^\beta,$$

удовлетворяющую условиям:

а)  $t=\text{const}$  есть пространственно-подобное сечение с метрикой  $\gamma_{\alpha\beta}(x, t)$ ;

б)  $\partial\gamma_{\alpha\beta}/\partial n$ , где  $n$  — нормаль к сечению  $t=\text{const}$ , непрерывны;

в)  $\gamma_{\alpha\beta}(x, t) = \gamma_{\alpha\beta}^0$  вне некоторой окрестности  $U$  области  $D_0$  в топологии многообразия  $M_0$ ;

г) индуцированные на двумерных сечениях  $F_0$  метрики  $a_{AB}(t)$  (они индуцируются метриками  $\gamma_{\alpha\beta}(x, t)$ ) удовлетворяют условиям 1–3 и  $d\sigma_s/d\sigma_t \leq 1$  при  $t < 1/2$ ,  $s > 1/2$  в  $U$ ;

д) гауссова кривизна  $\Gamma_s$  сечения  $F_0$  в метрике  $a_{AB}(s)$  неотрицательна ( $s > 1/2$ ).

Из (3), "в" — "д" следует

$$\int_{U \cap F_0} \Gamma_s d\sigma_t \geq 4\pi + \int_{U \cap F_0} \Gamma_t d\sigma_t, \quad t < 1/2, \quad 1/2 < s$$

или

$$\langle \delta\Gamma \rangle \cdot \sigma_t(U \cap F_0) \geq 4\pi, \quad (4)$$

где

$$\delta\Gamma = \Gamma_s - \Gamma_t,$$

$\sigma_t(A)$  — площадь области  $A \subset F_0$  в метрике  $a_{AB}(t)$ ,

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\sigma_t(A)} \int_A f d\sigma_t -$$

интегральное среднее величины  $f$ .

Динамика 3-геометрии описывается уравнениями Эйнштейна, из которых следует ([3], с. 157)

$${}^{(3)}R_t + K_{2,t} = \frac{16\pi G}{c^4} \varepsilon(t), \quad t \in [0, 1]; \quad (5)$$

$$K_{2,t} = (K_{\alpha}^{\cdot\alpha}(t))^2 - K_{\alpha\beta}(t)K^{\alpha\beta}(t),$$

где  $K_{\alpha\beta}(t)$  — тензор внешней кривизны сечения  $t = \text{const}$ .

Тогда

$$\langle \delta^{(3)}R \rangle + \langle \delta K_2 \rangle = \frac{16\pi G}{c^4} \langle \delta\varepsilon \rangle, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}R &= {}^{(3)}R_s - {}^{(3)}R_t, \quad \delta K_2 = K_{2,s} - K_{2,t}, \quad \delta\varepsilon = \varepsilon(s) - \varepsilon(t), \\ t &< 1/2, \quad 1/2 < s. \end{aligned}$$

Но как показывалось выше,

$$\langle \delta^{(3)}R \rangle \sim 2 \langle \delta\Gamma \rangle, \quad (7)$$

где  $\Gamma$  — гауссова кривизна двумерного сечения  $F_0$ . В то же время, благодаря условию "б", внешняя кривизна  $K_{2,t}$  будет непрерывной функцией на  $M_0 \times [0, 1]$ . Следовательно

$$\langle \delta K_2 \rangle = (K_{2,s} - K_{2,t})|_{x=x_0(t,s)} \xrightarrow[t \rightarrow 1/2-0]{s \rightarrow 1/2+0} 0 \quad (8)$$

Поэтому для некоторых  $t_0 < 1/2$  и  $1/2 < s_0$  величина  $\langle \delta K_2 \rangle$  пренебрежимо мала, и тогда из (4)–(8) получаем

$$\langle \delta\varepsilon \rangle \gtrsim \frac{c^4}{2\pi G} \frac{1}{\sigma_{t_0}(U \cap F_0)}.$$

Вполне позволительно теперь написать

$$\langle \delta\varepsilon \rangle \gtrsim \frac{c^4}{2\pi G} \frac{1}{\sigma}, \quad (9)$$

где  $\sigma$  — характерное сечение области  $D_0$ .

Формула (9) дает нам среднее значение скачка плотности энергии, который обеспечивает отрыв области  $D_0$ .

Из (9) получаем следующие оценки:

- 1) при  $\sigma \sim 10^{202}$  (Солнце),  $\langle \delta\rho \rangle = \langle \delta\varepsilon \rangle / c^2 \sim 10^7/3$ ;
- 2)  $\sigma \sim 10^{122}$  (нейтронная звезда),  $\langle \delta\rho \rangle \sim 10^{15}/3$ ;
- 3)  $\sigma \sim 10^{-662}$  (сингулярность),  $\langle \delta\rho \rangle \sim 10^{93}/3$ .

Таким образом, отрыву малых областей препятствует мощный потенциальный барьер. Искусственное перемещение в пространстве за счет изменения топологии самого пространства потребует огромных энергетических затрат. Сверхплотные конфигурации близки по своим параметрам к тому, чтобы оторваться от пространства. Тем самым подтверждаются выводы, сделанные нами в [1] в случае замкнутой модели вселенной. Следует ожидать, что нарушение связности происходит при гравитационном коллапсе массивных звезд, ибо при этом возникают сингулярности (на основании теоремы Пенроуза [4], с. 242), влекущие сингулярность кривизны. Нетрудно заметить, что картина нарушения связности, описываемая нами, во многом сходна с процессом гравитационного самозамыкания, сопровождающего гравитационный коллапс однородных сферически-симметричных конфигураций, столь подробно разбираемым в ([5], с. 52). Поэтому можно ожидать, что образование сингулярностей происходит вследствие нарушения связности 3-пространства.

## Список литературы

- [1] Г у ц А. К. Изв. вузов, Физика, 1982, **5**, 23.
- [2] P. U o d z i s. Gen. Relat. and Gravit., 1973 **4**, 299.
- [3] Ч. М и з н е р, К. Т о р н, Д ж. У и л е р. Гравитация, **2**, М., Мир, 1977.

- [4] Х о к и н г С., Э л л и с Д ж. Крупномасштабная структура пространства-времени, М., Мир, 1977.
- [5] Ч. М и з н е р, К. Т о р н, Д ж. У и л е р. Гравитация, **3**, М., Мир, 1977.